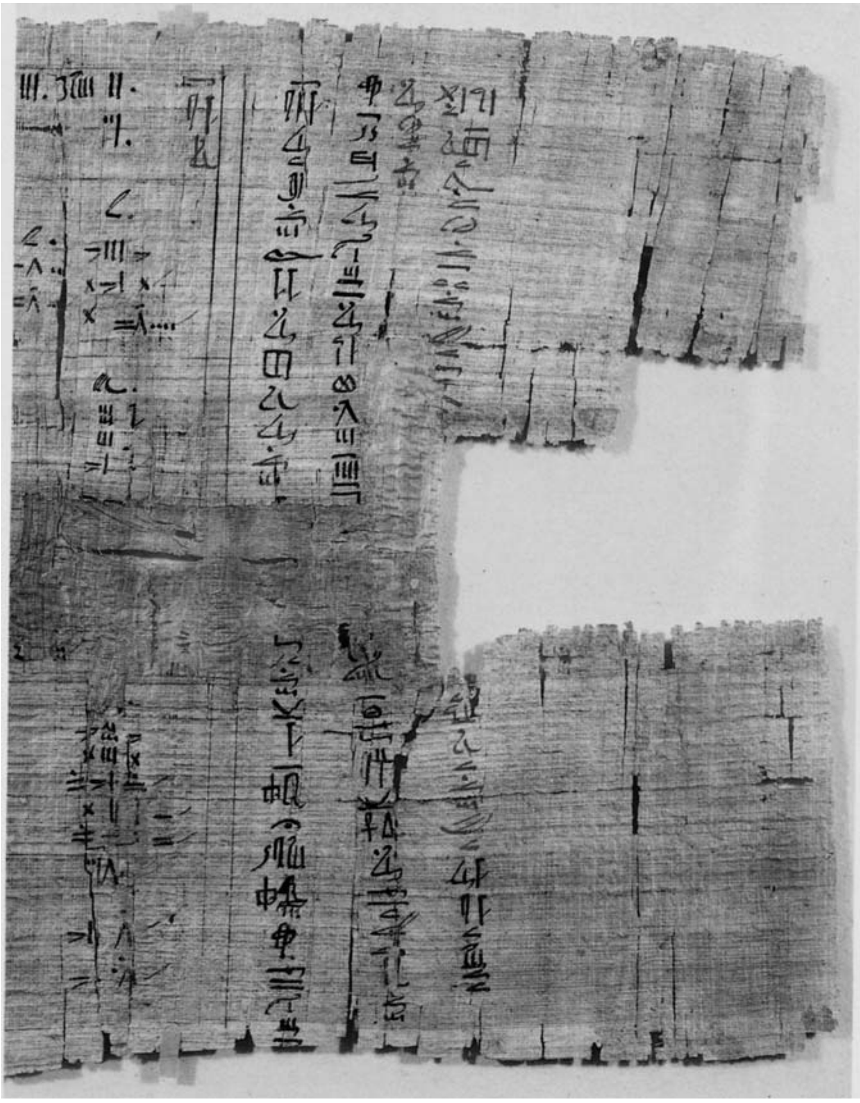


Partie du recto du papyrus mathématique égyptien de l'époque pharaonique dénommé *Papyrus Rhind*, écrit en hiératique vers 1650 avant notre ère par le scribe Ahmès. Il traite de la décomposition des fractions 2/N (N entier) en fractions de numérateur unitaire. Le ***Papyrus Rhind*** est actuellement conservé au *Bristish Museum* à Londres (numéros d'identification : BM 10057, BM 10058).

❒ L'arithmétique en Afrique noire pharaonique : les duplications d'AHMÈS

Jean-Paul FOUGAIN

Résumé : *Le recto du* ***Papyrus Rhind*** *dû au scribe égyptien* ***AHMÈS*** *(circa 1650 avant notre ère) présente les duplications des fractions unitaires impaires de 1/3 à 1/101 et les fractions décimales N/10 pour N variant de 1 à 9. Chaque fraction est décomposée en somme de fractions unitaires distinctes. Dans cet article, l'auteur analyse toutes les décompositions des duplications du* ***recto du Papyrus Rhind*** *proposées par Ahmès, en apportant un éclairage nouveau sur le raisonnement et la méthode utilisés, il y a 4 000 ans.*

Abstract : **Arithmetics in Pharaonic Black Africa : the duplications of AHMES -** T*he recto of the Rhind Mathematical Papyrus due to Egyptian scribe AHMES (circa 1650 BC) presents the duplications of odd unit fractions, from 1/3 to 1/101 and the decimal fractions N/10 for N varying from 1 to 9. Each fraction is expressed as a sum of distinct unit fractions. In this paper, the author analyses all decompositions of duplications of the recto of the Rhind Mathematical Papyrus, proposed by Ahmes, by bringing new light on the method and the reasoning used 4000 years ago.*

1. Introduction

Le recto du papyrus Rhind présente les **duplications des fractions unitaires impaires de 1/3 à 1/101 et les fractions décimales N/10 pour N variant de 1 à 9**. Chaque fraction est décomposée en somme de fractions unitaires distinctes suivie d'une démonstration rigoureuse.

C'est en 1877 qu'**August Eisenlohr**[1] propose la première traduction du texte hiératique écrit par le scribe égyptien **Ahmès** vers 1650 avant notre ère. Depuis lors " *… les savants et les mathématiciens modernes sont loin d'être d'accord sur le procédé mis en œuvre pour arriver au résultat ; cependant on admire aujourd'hui encore la maîtrise étonnante et la sûreté avec lesquelles les scribes ont traité des fractions* "[2].

---

[1] Auguste Eisenlohr, ***Ein Mathematisches Handbuch der Alten Ägypter****, (Papyrus Rhind des British Museum), übersetzt und erklärt*, Leipzig, 1877.
Le papyrus est signalé au public par F. Lenormant en 1867, "*Note relative à un papyrus égyptien contenant un fragment d'un traité de géométrie appliquée à l'arpentage* " dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* Vol. 65 (1867), p.903**.**
[2] Cheikh Anta Diop, ***Civilisation ou barbarie***, Paris, Présence Africaine, 1981, p. 348.

"*La méthode de décomposition ainsi inventée par les Égyptiens était très complexe, très difficile à suivre* "[3].

"*How this feat was achieved has exercised the minds of Egyptologists and mathematicians for many years*"[4].

Nous proposons dans ce travail une analyse de toutes les décompositions des duplications du **recto du papyrus Rhind** exposées par Ahmès, en apportant un éclairage nouveau sur le raisonnement et la méthode utilisés, il y a 4 000 ans.

2. Le *Papyrus Rhind* - Présentation

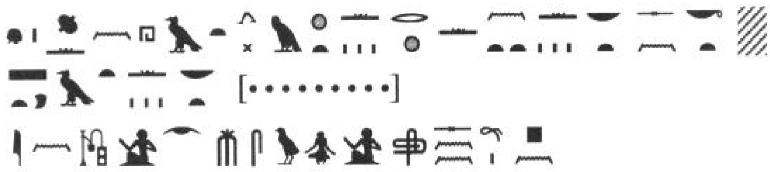
L'auteur de ce papyrus est le scribe **Ahmès**. Ahmès l'a copié d'une source datant de 200 ans, donc du règne du pharaon **Amenemhat III** appartenant à la période du Moyen Empire[5], ce qui situe la rédaction du papyrus original vers 1850 avant notre ère. Sa longueur totale initiale est 543 cm et sa largeur est 33 cm.

Il est actuellement identifié sous le nom de **Papyrus Rhind** / **Rhind Mathematical Papyrus** (RMP) et localisé au *British Museum*, n° 10057 et 10058. Quelques fragments « Smith fragments » ont été découverts à l'*Historical Society of New York*, n° 265 par P. E. Newberry en 1922.

Découvert dans un petit bâtiment près du Ramesseum, à la rive ouest du Nil, à Thèbes, **Henry Alexander Rhind** (1833-1863), jeune avocat Écossais , séjourne en Égypte pour des raisons de santé et l'achète à Louksor en 1858. Le *British Museum* l'acquiert en 1865. Les fragments ont été achetés à Louksor en 1862-63 par l'américain **Edwin Smith**, d'où la dénomination de « Smith fragments ». Les « Smith fragments » étaient conservés initialement à l'*Historical Society of New York* (où P. E. Newberry les découvrit). Ils sont actuellement conservés au *Brooklyn Museum*, aux États-Unis.

Le papyrus est écrit au recto et au verso. Le texte est rédigé en écriture hiératique, avec de **l'encre noire et de l'encre rouge**[6]. C'est le papyrus mathématique pharaonique le plus complet et le plus célèbre que l'on ait retrouvé à ce jour.

En 1877, l'allemand **August Eisenlohr** en publie la première traduction et introduit la désignation numérique en 87 problèmes que l'on rattache à différents domaines des mathématiques : l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse, la trigonométrie, la géometrie et la théorie de la mesure. Il contient un titre qui traduit la conception des mathématiques qu'avait le savant de l'Égypte ancienne :



[3] *Ibidem*.
[4] Gay Robins & Charles Shute, ***The Rhind Mathematical Papyrus***,British Museum Press, London, 1987, p. 22.
[5] L'expression anglaise *Middle Kingdom* apparaît plus appropriée.
[6] L'utilisation de l'encre rouge signifie que l'auteur souligne la partie du texte concernée.

Translitération et traduction :

tp-ḥsb (méthode correcte) *n h3t* (d'investigation) *m* (dans) *ẖt* (la nature) *rḫ* (pour connaître) *ntt nbt* (tout ce qui existe) *snkt nbt* (chaque mystère) *št3t nbt* (tous les secrets) *in šs Iʿḥ-Msw* (Ahmès) *spẖr snn pn* (qui a copié cette copie)[7]

3. Le recto du *Papyrus Rhind* – Aperçu historique

Depuis la première traduction du papyrus Rhind, quelques tentatives pour comprendre la méthode du scribe peuvent être listées par ordre chronologique[8] : Eisenlohr, 1877 ; Favarro, 1879 ; Sylvester, 1880 ; Collignon, 1881 ; Shack-Shackenburg, 1882 ; Tannery, 1884 ; Mansion, 1888 ; Loria, 1892 ; Hultsch, 1895 ; Griffith, 1911 ; Peet, 1923 ; Neugebauer, 1926 ; Chace, 1927 ; O.Gillain, 1927 ; Vogel, 1929 ; Van Der Waerden, 1937 ; Hogben, 1945, Struik, 1948 ; Becker, 1951 ; Bruins, 1952 ; Vogel, 1958 ; Gillings ; 1972, 1974 ; Bruchheimer & Salomon, 1977 ; Caveing, 1977 ; Knorr, 1982 ; Milo Gardner, 1997.

On peut relever quelques commentaires de ces auteurs, cités notamment par Gillings[9] :

- ***Sylvester, 1882*** : "*… The very beautiful ancient Egyptian method of expressing all fractions under the form of a sum of the reciprocals of continually increasing integers.*"
- ***Mansion, 1888*** : "Les décompositions sont toujours, à un point de vue ou à un autre, plus simples que toute autre décomposition possible. "
- ***Hultsch, 1895*** : "*Attempts to explain it [i.e. the method of the Egyptians]… have hitherto not succeeded.* "
- ***Griffith, 1911***: "*The men who designed the pyramids must have had insight into scientific principles, hardly credited to the Egyptians from their written documents alone.* "
- ***Chace, 1927*** : "*Of the discussions which I have seen, the clearest is that by Loria. But no formula or rules has been discovered that will give all the results of the table, and Loria expressly says that he does not attempt to indicate how the old Egyptians obtained them.* "
- ***Peet, 1931*** : "*The recto is a monument to the lack of scientific attitude of mind.* "
- ***Hogben, 1945*** : "*They went to extraordinary pains to split up fractions like 2/43 into a sum unit fraction … a procedure as useless as it was ambiguous. They Greeks and Alexandrians continued this extraordinary performance.* "
- ***Struik, 1948*** : "*All available texts point to an Egyptian mathematics of rather primitive standards.* "
- ***Gillings, 1972*** : "*And now in the twentieth century A.D, nearly 4000 years after the Egyptians first devised their system for fractions, modern mathematicians have tried to determine what principles and processes the ancient Egyptian scribes used in preparing the recto table. How was it possible for them, with only knowledge of the twice-times table and an ability to find two-thirds of any integral or fractional number, to calculate unit fractional equivalents of 2/5, 2/7,2/9, …, 2/101 without a*

7 Cf. Théophile Obenga, ***La géométrie égyptienne, – Contribution de l'Afrique antique à la Mathématique mondiale***, Paris, L'Harmattan/Khepera, 1995.
8 R. J.Gillings,"The Recto of the Rhind Mathemetical Papyrus. How did the ancient Egyptian scribe prepare it ?" in *Archive for the history of exact sciences*, 12, n° 4 (1974), 291 – 298.
R. J.Gillings, Richard J.Gillings, ***Mathematics in the time of the pharaohs***, Cambridge, MIT Press, 1972, p. 48
9 R. J. Gillings, *op. cit.*, p. 48.

single arithmetical error ? And how did it come about that, of all the many thousands of possible answers to these decompositions, those recorded by the scribe of the RMP were in almost every case the simplest and the best possible, by his own prescribed standards ? " [10]

"*The scribe's effort here is truly amazing. From the 124 decompositions listed by the computer, those having two or three terms …and one can only remain lost in hopeless admiration of the ancient Egyptian scribe, who could, with the meagre arithmetical tools at his disposal, so unerringly locate this value among the 124 available.* "[11]

"*My own theory has been published in Archive for History of exact Sciences. I do not consider it proper, however, to discuss that article in detail until it has been read and studied or reviewed by competent judges, and its merits evaluated. It therefore sufficient to state that I considered the one equality of the Recto that was entirely unique in its context(as verified by computer KDF-9) : the very last, 2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606, which is the only possible four term unit fraction value for division. From this equality, expressed generally as 2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/6n, I derive every other equality of the recto, using those methods and technique accepted as being attributable to the scribes.* "[12]

"In summary, the 2/n table of the Rhind Papyrus, which dates from more than a thousand years before Pythagoras, seems to show an awareness of prime and composite numbers, a crude version of the "Sieve of Eratosthenes", a knowledge of the arithmetic, geometric, and harmonic means, and of the "perfectness" of the number 6. This all seems to suggest a greater number-theoretic sophistication than is generally credited to the ancient Egyptians."[13]

Le philosophe des sciences ***Maurice Caveing*** écrit dans son *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*[14] :

"*D'autre part le lien entre la duplication continue et la notion de nombre parfait mérite d'être souligné.*

Le nombre parfait P est obtenu au moyen de deux séries de duplications successives : la première est la duplication de l'unité elle-même jusqu'à ce que la somme de la série soit le nombre premier p, la seconde est la duplication, également continue, de p jusqu'au facteur 2^{n-2}*, dans lequel n est tel que :* $2^n = p + 1$*. Ce lien entre le nombre parfait et le procédé de duplication est apparent jusque dans la formulation du théorème euclidien lui-même, et il est assez remarquable que ce théorème soit le dernier des Livres arithmétiques d'Euclide (IX,36), comme la duplication de 101, qui repose sur les propriétés du nombre parfait, est la dernière de la Table des duplications du Papyrus que le scribe Ahmès transcrivit quelque treize siècles plus tôt. Il nous a paru intéressant de nous arrêter sur ce point afin*

---

10 Gillings, *op. cit.*, p. 47
11 Gillings, *op. cit.*, p. 62
12 Richard J. Gillings, "The Mathematics of Ancient Egypt", in ***Dictionary of scientific biography***, American Council of Learned Societies, Charles Scribner's sons, New-York, 1981, p. 681-705.
13 M. Keith, "Egyptian Unit Fractions", http://www.mathpages.com/home/kmath340/kmath340.htm
14 Maurice Caveing, ***Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes***, Presses Universitaires de Lille, 1994, p. 358-359.

de mettre en lumière comment l’arithmétique des Égyptiens a pu inspirer des recherches ultérieures, par l’usage qu’elle fait de propriétés non explicitées et les germes de développements mathématiques qu’elle recèle. ”

4. L’originalité de l’arithmétique égyptienne

Cheikh Anta Diop dégage l’originalité de l’arithmétique égyptienne en ces termes :

“ *L’originalité de l’arithmétique égyptienne est qu’elle n’exige aucun effort de mémoire. La multiplication et la division se ramènent à des additions après une série de duplications. Seule, la table de multiplication par deux est nécessaire à connaître pour effectuer facilement les opérations les plus complexes ; par contre, dans la l’arithmétique mésopotamienne, la connaissance de la table de multiplication était indispensable pour pouvoir calculer*.”

“ *Les opérations sur les fractions portent en général sur les fractions de numérateur égal à l’unité ; cependant les Égyptiens connaissaient et utilisaient aussi les fractions complémentaires suivantes : 2/3 (fréquemment utilisée), 3/4, 4/5, 5/6 (moins fréquemment employée).*”[15]

Maurice Caveing dans un *entretien sur l’histoire des mathématiciens* souligne quelques traits saillants de l’arithmétique égyptienne :

“ *…C’est de l’arithmétique, et c’est, je crois, la caractéristique principale du génie des égyptiens d’avoir poussé très loin le maniement des propriétés des nombres*.”

“*Il faut d’ailleurs remarquer que dans leur système, le quotient fractionnaire d’une division est toujours exact*. ”

“ *Dans le système égyptien, qui a un caractère en quelque manière très hiératique, très précis, on a toujours le quotient exact, quel que soit le nombre de quantièmes que l’on doive écrire. Il n’y a pas de résultat approché.*”

“ *Les Égyptiens sont des gens qui sont habitués à avoir des résultats exacts.* ”

“ *…une habitude de l’exactitude arithmétique qui est très importante. Il y a une familiarité avec les nombres entiers qui fait que la pensée mathématique égyptienne, dans sa précision, sa finesse arithmétique, se rapproche pour ainsi dire de la ligne de ces statues hiératiques dans lesquelles ils exprimaient la puissance des dieux. Ce sont deux aspects de leur civilisation que l’on peut rapprocher.*”[16]

[15] Cheikh Anta Diop, ***Civilisation ou barbarie***, *op. cit.*, p. 348.
[16] Maurice Caveing, in ***Le matin des mathématiciens, entretiens sur l’histoire des mathématiciens***, présentés par Émile Noël, Paris, Belin-Radio France, 1985, p. 24-25.

5. L'opérateur 2/3

Les Égyptiens listent en extension les nombres entiers naturels de façon suivante : 0, 1, 2, 3, 4, …+ ∞[17]
L'inverse d'un nombre entier N non nul, est un nombre rationnel (*ro*)[18] 1/N tel que N × 1/N = 1/N × N = 1. Et le nombre rationnel 1/N dans ce cas a pour inverse N qui est un nombre entier non nul.

Les nombres entiers naturels font partie des rationnels.

L'addition et la multiplication des rationnels sont des opérations internes. Les rationnels munis de ces deux opérations forment un corps commutatif.

Le nombre zéro

Le nombre zéro  (*nfrw*)[19] est inventé par les mathématiciens égyptiens aussi naturellement et probablement en même temps que les autres nombres. Le zéro est un nombre absorbant i.e que 0×N = 0, quel que soit le nombre N. Le nombre zéro n'est donc pas inversible. Le zéro est donc exclu de l'étude d'Ahmès sur la duplication des inverses des entiers non nuls.

Le nombre un
Le premier nombre inversible est 1. 1 × 1 = 1, 1 est son propre inverse, c'est le seul nombre entier positif dont l'inverse est également un nombre entier.
1 est également neutre pour la multiplication i.e que 1×N = N×1= N, quel que soit le nombre N.

Le nombre deux
Le nombre 2 est le premier nombre premier i.e. qu'il n'a que deux diviseurs 1 et lui-même (il ne pouvait en être autrement pour le nombre 2). On dit aussi qu'un nombre est premier si sa seule partie aliquote est l'unité.
L'inverse de 2 est 1/2 : 2 × 1/2 = 1= 1/2 + 1/2.
2 est le seul nombre entier non nul dont l'inverse s'additionne à lui-même pour donner l'unité.
2 est le seul nombre premier pair.
1/2 est la première fraction unitaire paire.

La base par excellence
Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est une base des nombres entiers. C'est-à-dire qu'on peut utiliser les puissances de la base pour décomposer de façon unique tout nombre entier.
La première base, la plus petite et la plus naturelle est 2. La base 2 s'avère être la base la plus efficace pour les opérations arithmétiques.
La base 2 est choisie par les Égyptiens pour effectuer toutes les opérations arithmétiques, en utilisant les duplications successives et additions appropriées sur tout nombre rationnel.

---

[17] W. M. Flinders Petrie, ***Illahun, Kahun and Gurob***,London, 1889-90, p. 14.
[18] Cheikh Anta Diop, ***Civilisation ou barbarie***, *op. cit*., p. 348.
[19] Sir A. Gardiner, ***Egyptian Grammar***, third edition, Griffith Institute, Asmolean Museum, Oxford, 1994, p. 574 ; Cheikh Anta Diop, ***Civilisation ou barbarie***, *op. cit*., p. 348 ; Beatrice Lumpkin, "Mathematics Used in Egyptian Construction and Bookkeeping", in the *Mathematical Intelligencer*, 24, n°2, 2002, p. 20-25.

Le nombre 3

Le nombre 3 est également utilisée en arithmétique égyptienne comme base pour effectuer certaines opérations.
3 est le premier nombre premier impair.
L’inverse de 3 est 1/3.
1/3 est la première fraction unitaire impaire.
Son complémentaire à 1 est 2/3.
2/3 est la duplication de 1/3.

La base 3

L’égyptien décompose tout nombre entier positif N en utilisant les multiples de 3.

$N = (3 \times P) + R$, P étant un entier et $R = 0$, 1 ou 2.
Si $R=0$, alors $N = 3 \times P$. Donc N est un multiple de 3. Exemple : $3 = 3 \times 1$.
Sinon N est non divisible par 3 et alors $N = (3 \times P) + 1$ ou $N = (3 \times P) + 2$.

La fraction 2/3 [20]

1 + 1/2 est le rationnel 3/2 qui a pour inverse 2/3.

Dans la conception égyptienne dire que 2/3 est la duplication de 1/3 se formule ainsi :

« Appeler (*nis*) 2 à partir (*ẖnt*) de 3 »[21].
C’est multiplier 3 par quel nombre rationnel pour obtenir 2 ?
Le résultat est 2/3.
Ou encore je multiplie 3 par quel rationnel pour obtenir 2 ?
Je duplique en effet le 1/3 : ? × 3 = 2.
On trouve : ? = 2/3.

La démarche est purement algébrique.

La fraction complémentaire 2/3, duplication du 1/3 et inverse de 3/2, est la plus grande des fractions utilisées par le scribe dans le ***Papyrus Rhind***, pour déterminer une décomposition standard **des duplications des fractions unitaires, de 2/3 à 2/101**.

2/3 est le premier résultat qui apparaît dans le recto, exactement comme la définition ci-dessus. Et Ahmès écrit que 2/3 de 3 est égal à 2 pour prouver que 2/3 est bien le double de 1/3.

2/3 est la seule duplication de fraction unitaire impaire présente sans décomposition[22].
Son numérateur est égal 2 (voir ci-dessus le paragraphe sur le nombre 2).
Son dénominateur est égal 3 (voir ci-dessus le paragraphe sur le nombre 3).

D’emblée, Ahmès semble souligner la singularité de la fraction 2/3. Formée d’un numérateur premier pair 2 (le premier nombre premier, l’unique nombre premier pair et la base par excellence de l’arithmétique égyptienne) et d’un dénominateur premier 3 (le

[20] “a great role, is played in Egyptian arithmetic by the fraction, *rwy*, ‘the two parts’ (out of three)” (cf. A. Gardiner, *op. cit*., p. 197).
[21] Marshall Clagett, “Ancient Egyptian Science”, ***A source Book, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics,*** American Philosophical Society, Independence Square Philadelphia, 1999, p. 122 et p. 326.
[22] Une décomposition de 2/3 en 2 fractions unitaires sera obtenue dans le problème 61B. 2/3=1/2+1/6 (cf. fig. 3, *infra*).

premier nombre premier impair, une base utilisée pour certaines opérations. 2 et 3 sont les deux nombres entiers positifs consécutifs et premiers. Il n' y en a pas d'autres.

Ahmès a également écrit la duplication du 1/3 i.e. 2/3 au recto du papyrus juste après le « titre » et il a inscrit le problème 61B quasiment à l'endroit correspondant au verso.[23]

2/3 *d'un entier N*

On a vu (cf. § ***La base 3.*** *supra*) la décomposition de N en utilisant les multiples de 3. Avec la définition du 2/3 ci-dessus, l'Égyptien va trouver directement les 2/3 et le 1/3 de tout nombre entier N.

La définition du 2/3 indique directement que 2/3 de 3 est égal à 2.

$2/3 \times 3 = 2$.(C'est évident, par définition)[24]

On a :

$2/3 + 2/3 = 2/3 + 1/3 + 1/3 = 1 + 1/3$.
Donc 2/3 de 2 i.e. $2/3 + 2/3 = 1 + 1/3$.

$2/3 \times 2 = 1 + 1/3$.
$2/3 \times 1 = 2/3$

Par conséquent :

Si $N = 3 \times P$ alors $2/3 \times N = 2/3 \times 3 \times P = 2 \times P$. Et $1/3 \times N = P$.
Si $N = 3 \times P + 1$ alors $2/3 \times N = 2 \times P + 2/3$. Et $1/3 \times N = P + 1/3$.
Si $N = 3 \times P + 2$ alors $2/3 \times N = 2 \times P + 1 + 1/3$. Et $1/3 \times N = P + 2/3$.

2/3 d'une fraction unitaire 1/N, N ≠ 0

Pour N pair, $N = 2 \times P$, $P \neq 0$, $2/3 \times 1/N = 2/3 \times 1/(2 \times P) = 1/(3 \times P)$
Pour N impair, le problème 61B[25] indique : $2/3 \times 1/N = 1/(2 \times N) + 1/(6 \times N)$
On a en déduit que $2/3 = 1/2 + 1/6$.

La Liste des fractions unitaires du recto

Les fractions unitaires utilisées dans les décompositions du recto sont comprises entre 1/890 et 2/3.

Dans l'ordre décroissant on a : 2/3, ½,1/3, 1/4, …, 1/99, 1/100,1/101,…, 1/890.

[23] Gay Robins & Charles Shute, *The Rhind Mathematical Papyrus,* British Museum Press, London, 1987, p. 11.
[24] En égyptien ancien, 2/3 s'écrit *rwy*, les 2 parts de 3, donc par définition 2/3 de 3 est égal à 2. (cf. A.Gardiner, *op.cit.*, p. 197)
[25] Marshall Clagett, "Ancient Egyptian Science", ***A source Book, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics,*** American Philosophical Society, Independence Square Philadelphia, 1999, p.169.

6. Le problème général de la duplication d'une fraction unitaire

La notion de base

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est une base des nombres entiers. C'est-à-dire qu'on peut utiliser la base pour décomposer de façon unique tout nombre en somme finie des puissances de celle-ci. L'Égyptien utilise effectivement plusieurs bases : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14 , 16, 20, 24, 28, 30 et 60.

La série harmonique

Pour les nombres rationnels, il n'existe pas de base. Cependant on dispose de fractions unitaires, termes de la série harmonique comme référence naturelle.

Étant donné l'inexistence de base pour les rationnels, peut-on décomposer un nombre rationnel en somme finie de fractions unitaires distinctes et rangées par ordre décroissant ?

La réponse est positive, cependant la décomposition n'est pas unique, il existe une infinité de décompositions possibles.

La décomposition parfaite

En effet pour toute fraction unitaire 1/N, $N \geq 2$.

On a : $\frac{1}{N} = \frac{N+1}{N \times (N+1)} = \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{N \times (N+1)}$

Et la duplication de 1/N :
- si N est pair, $N = 2 \times P$ et $2/N = 1/P$.
- si N est impair, $N = 2 \times P + 1$:

$$\frac{2}{N} = \frac{2}{2 \times P + 1} = \frac{2}{2 \times (P+1)} + \frac{2}{(2 \times P + 1) \times 2 \times (P+1)} = \frac{1}{(P+1)} + \frac{1}{(2 \times P + 1) \times (P+1)}$$

Appelons cette dernière égalité "*formule de la décomposition parfaite*" pour N premier.
Dans le recto, Ahmès aurait pu choisir la décomposition parfaite pour tout N :

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{(P+1)} + \frac{1}{(2 \times P + 1) \times (P+1)}$$ (*formule de la décomposition parfaite*)

Ahmès va effectivement l'utiliser mais juste pour 5 fractions. Et il va définir un cadre général et une "méthode correcte", imposant une décomposition unique pour les autres duplications.

Les savants et mathématiciens modernes compétents sont toujours émerveillés devant la finesse et l'exactitude de la décomposition du mathématicien égyptien. Mais toutes les tentatives pour percer les secrets de leurs décompositions n'ont pas encore totalement abouti. Et le problème reste donc presque entier depuis la deuxième moitié du 19ème siècle.

7. Les nombres parfaits, abondants et déficients

On a vu l'importance et la place des nombres 2 et 3 dans les opérations arithmétiques.

Le nombre 6

Le nombre $6 = 3 \times 2$ joue un rôle important dans la méthode de décomposition de duplications des fractions unitaires impaires.

Le nombre 6 est un nombre parfait i.e. que le nombre est égal à la somme de ses diviseurs autre que lui-même.

Autrement dit un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses parties aliquotes.
$6 = 1 + 2 + 3$
6 est le premier nombre parfait inférieur à 100.

Le nombre 28

Il y a en tout deux nombres parfaits inférieurs à 100 : 6 et 28.
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

Les nombres abondants

Tout multiple d'un *nombre parfait* est *abondant* i.e. que la somme de ses diviseurs autres que lui-même est strictement supérieure à ce nombre. Autrement dit, un nombre est *abondant* s'il est inférieur à la somme de ses parties aliquotes. Un nombre abondant est « riche » en diviseurs.

- Le nombre 12

$12 = 6 \times 2$ est un nombre abondant et aussi $56 = 28 \times 2$.

12 est le premier nombre abondant. 12 possède 6 diviseurs. On a :
$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$

Pour 56 on a :
$1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 14 + 28 = 64 > 56$.

Les ***nombres abondants inférieurs à ou égal 100***. Il n'y en a que 21 :

12.
$18 < 1+2+3+6+9 = 21$
$20 < 1+2+4+5+10 = 22$
$24 < 1+2+3+4+6+8+12= 36$
$30 < 1+2+3+5+6+10+15=42$
$36 < 1+2+3+4+6+9+12+18=55$
$40 < 1+2+4+5+8+10+20=50$
$42 < 1+2+3+6+7+14+21=54$
$48 < 1+2+3+4+6+8+12+24=60$

54 < 1+2+3+6+9+18+27=66
56 < 1+2+4+7+8+14+28=64
60 < 1+2+3+4+5+6+10+12+15+20+30 =108
66 < 1+2+3+6+11+22+33=78
72 < 1+2+3+4+6+8+9+12+18+24+36 =123
78 < 1+2+3+6+13+26+39 =90
80 < 1+2+4+5+8+10+16+20+40=106
84 < 1+2+3+4+6+12+21+28+42=119
90 < 1+2+3+5+6+9+10+15+30+45=126
96 < 1+2+3+4+6+8+12+16+24+32+48=156
100 < 1+2+4+5+10+20+25+50=117

Les nombres déficients

Un nombre qui n'est ni *abondant*, ni *parfait* est *déficient*. Autrement dit, un nombre est déficient s'il est supérieur à la somme de ses parties aliquotes.
Tout nombre premier est déficient.
Toute puissance de 2 est un nombre déficient.
Le premier nombre non premier déficient est 4

8. Position du problème d'Ahmès

Exclusion des nombres zéro et un

On a vu plus haut que le nombre 0 est absorbant, non inversible et est par conséquent exclu du champ d'étude d'Ahmès.
L'unité 1 est également très particulier. C'est l'élément neutre de la multiplication.
Pour cela notamment ces 2 nombres sont exclus de l'étude d'Ahmès.

Les 100 premiers nombres

Ahmès considère en effet les 100 premiers nombres entiers supérieurs ou égal à 2.
On a donc 2, 3, 4, …, 100,101.
Les deux premiers 2 et 3 jouent un rôle crucial dans les opérations arithmétiques.
2 est la base utilisée pour les opérations arithmétiques.
3 est la base utilisée pour l'opérateur 2/3.
6 = 3 × 2, 6 est parfait et 12 = 6 × 2, 12 est abondant.

50 nombres pairs et 50 nombres impairs

Parmi les 100 nombres, on a 50 pairs et 50 impairs.

50 nombres pairs – Duplications de fractions unitaires paires

Avec les 50 nombres pairs, on les inverse pour obtenir les fractions unitaires paires.
Les inverses des fractions paires se dupliquent aisément. En effet :

Si $N = 2 \times P$, $2/N = 1/P$ pour $P \geq 1$.On obtient toujours une fraction unitaire.

50 nombres impairs – Duplications de fractions unitaires impaires

Avec les 50 nombres impairs, on les inverse pour obtenir les fractions unitaires impaires. Leur duplication ne donne jamais une fraction unitaire mais peut être décomposée en une somme finie de fractions unitaires distinctes. Il faut donc procéder à une décomposition de chaque duplication.

Pour chaque duplication, il existe une infinité de décompositions possibles. Ahmès propose pour chacune des 50 duplications une décomposition unique (la *décomposition d'Ahmès*). Nous allons les analyser dans leur totalité pour découvrir la «méthode correcte» qu'utilise le scribe.

9. La méthode correcte

Le scribe a une connaissance parfaite des propriétés arithmétiques des 50 premiers nombres impairs. Il réalise une partition qui lui permet de déterminer le procédé à suivre pour chaque cas.

Le premier nombre 3 est très particulier. C'est la première entrée du recto du *Papyrus Rhind*. Et cette entrée est également très particulière :

« Appeler (*nis*) 2 à partir (*hnt*) de 3 » 2/3.

C'est évident car par définition 2/3 de 3 est égal à 2.

Ainsi la duplication de 1/3 est donc tout simplement 2/3. La fraction 2/3 est donc acceptée sans décomposition.

Partition des fractions unitaires impaires

Pour les fractions unitaires impaires différentes de 1/3, on examine les dénominateurs:

- *Dénominateur premier : nombre premier*

24 sont premiers (excepté le 3) :
5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.

Les nombres composés : Produit de facteurs premiers

- *Dénominateur multiple de 3 : nombre triple*

16 qui sont multiples de 3 (non premier) : 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99.

- *Dénominateur carré : nombre carré* (non triple)
2 sont des carrés : 25, 49
- *Dénominateur divisible par 5*

5 sont divisibles par 5 (non triple, non carré et non premier) : 35, 55, 65, 85, 95.

- Dénominateur divisible par 7
2 sont divisibles par 7(non triple, non carré, non premier, non divisible par 5) : 77, 91.

On a les 50 fractions : 1 + 24 + 16 + 2 + 5 + 2 = 50.

10. Décomposition pour les multiples de 3 (nombres triples)

Si N est multiple de 3, distinct de 3, alors N = 3k, k impair, $3 \leq k \leq 33$.

Pour dupliquer N.

« Appeler (*nis*) 2 à partir (*hnt*) de 3k »

On a vu que 2/3 de N est égal 2k.(cf. supra. § 5, 2/3 d'un entier N)
On a donc: N/2k = 3k/2k = 3/2 = 1 + 1/2, il reste donc 1/2 pour atteindre le 2.
On l'obtient tout simplement en faisant $2 \times N = 6k$ (en effet 1/2 = N/2N)
N/2k + N/2N = 1 + 1/2 + 1/2 = 2.
Donc 2/N = 1/2k + 1/2N.

Appelons cette égalité "formule de la décomposition harmonique".

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{(2k)} + \frac{1}{(2 \times N)} = \frac{1}{(2k)} + \frac{1}{(2k \times 3)}$$ (*formule de la décomposition harmonique*)

11. Application de la décomposition parfaite

Si N est impair :
$N = 2 \times P + 1, P \geq 1$.

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{(P+1)} + \frac{1}{(2 \times P + 1) \times (P+1)}$$ (*formule de la décomposition parfaite*)

Cette formule sera appliquée pour P + 1 = 2, 3, 4, 6 et 12.
2, 3, 4, 6 et 12 sont des diviseurs de 12.
N impair, N = $2 \times P + 1$, (P+1) divise 12 si et seulement si P + 1 = 2, 3, 4, 6 et 12.
On a déjà noté l'importance du 2 et du 3.
4 et 6 sont leurs duplications successives.
6 est parfait et 12 qui est abondant (le premier nombre abondant) est la duplication du 6.
On peut également noter ou souligner une fois de plus que pour ces 5 nombres :
2 est le premier nombre premier pair.
3 est le premier nombre premier impair.
4 est le premier nombre pair non premier et déficient.
6 est le premier nombre parfait.
12 est le premier nombre abondant.
Donc pour les 5 nombres impairs issus des nombres ci-dessus (les diviseurs de 12), on applique la formule de la décomposition parfaite.
Pour P + 1 = 2, N = 3, et 2/3 = 1/2 + 1/6 (*Papyrus Rhind*, problème n° 61B)

Pour P + 1 = 3, N = 5, et 2/5 = 1/3 + 1/15
Pour P + 1 = 4, N = 7, et 2/7 = 1/4 + 1/28[26]

Pour P + 1 = 6, N = 11, et 2/11 = 1/6 + 1/66

Pour P + 1 = 12, N = 23, et 2/23 = 1/12 + 1/276

Ces 5 décompositions sont les seules pour les dénominateurs impairs et premiers du recto qui comportent 2 termes.

Outre les caractéristiques particulières de chacun de ces 5 nombres impairs, décrites ci-dessus, leur propriété commune est la suivante :

N = 2 × P + 1, P ≥ 1, **(P+1) est un diviseur de 12** (12 est le premier nombre abondant).

12. Trame générale

- Pour N = 3k, on a : 2/N = 1/2k + 1/2N = 1/2k + 1/(2k × 3)

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{(2k)} + \frac{1}{(2 \times N)} = \frac{1}{(2k)} + \frac{1}{(2k \times 3)}$$ ("formule de la décomposition harmonique")

La réciproque est également vraie.
On prouve aisément que si 2/N = 1/2k + 1/2N alors N = 3k.
Donc le scribe choisit une décomposition en 2 fractions unitaires paires qui est la décomposition la plus simple et valable uniquement pour les multiples de 3.

- Pour N premier impair.

N = 2P + 1, P ≥ 1

On applique la *formule de la décomposition parfaite* si et seulement si P+1 = 2, 3, 4,6 et 12. i.e. (P+1) est un diviseur de 12.

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{(P+1)} + \frac{1}{N \times (P+1)} = \frac{1}{(P+1)} + \frac{1}{(2 \times P+1) \times (P+1)}$$ (*formule de la décomposition parfaite*)

On a ainsi une trame générale de décomposition en 2 fractions unitaires distinctes pour les dénominateurs multiples de 3 (*décomposition harmonique*) et les dénominateurs issus des diviseurs de 12 (*décomposition parfaite*).

En réalité la trame générale est de la forme :

2/N = 1/M + 1/(J × N) (trame générale à 2 termes)

avec M = 2k et J = 2 pour N = 3k ; M = P + 1 = J pour N = 2 × P + 1, P ≥ 1, (P+1) est un diviseur de 12.

[26] 1 coudée *(mḥ* : 7 palmes (*šsp*) ; 1 palme = 4 doigts (*ḏbʿ*) donc 1 coudée = 28 doigts.

Pour les autres cas, la trame générale sera étendue. Elle comporte au maximum 4 termes.

13. Trame générale étendue

Il existe une trame générale étendue pour la décomposition du reste des fractions impaires qui refusent de se soumettre aux contraintes de la trame générale. Elle comporte au minimum 3 termes si le dénominateur est premier. L'étude de la trame générale étendue comporte trois parties : la trame générale étendue pour les dénominateurs premiers, l'application de la la trame générale étendue pour les dénominateurs premiers et la trame générale étendue pour les dénominateurs non premiers(nombres composés).

Ce paragraphe étudie la trame générale étendue pour les dénominateurs premiers.

Pour N premier $\neq 101$.

On considère $N = 2P + 1$. On suppose N non multiple de 3. $N \neq 3$ k, quel que soit k entier. On suppose que $P+1 \neq 2, 3, 4{,}6$ et 12. Par conséquent $13 \leq N \leq 97$.

La trame générale étendue pour les dénominateurs premiers est de la forme suivante :

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{M} + \frac{1}{N}\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{R} + \frac{a}{S}\right)$$ avec a = 0 ou 1 ; Q < R < S ("formule de la trame 1")

Elle est peut être symbolisée par le **quintuplet [M, Q, R, a, S]**. (Symbole 1)
Lorsque a = 0, le symbole est réduit en triplet **[M, Q, R]**.
Le nombre minimum de décompositions est donc de 3 termes. Et si a = 1 alors la décomposition comporte 4 termes.
Le nombre a est l'indicateur du nombre de termes de la décomposition.
M est une « *unité d'Ahmès* » comprise entre P + 2 et 2P

Q, R, S sont acceptés parmi les 10 nombres suivants (*les «chiffres» d'Ahmès*) : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10 et 15.

M est accepté parmi les 10 « unités d'Ahmès » : 8, 12, 20,24, 30, 36,40, 42,56 et 60. ($P + 2 \leq M \leq 2P$)

Le choix de Q, R et S : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10 et 15. (*les «chiffres» d'Ahmès*)

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10 est la série arithmétique de 9 termes, de raison 1 et de premier terme 2.

Le dernier terme est 10. **Ahmès** voudrait 10 unités (« chiffres ») comme dans sa représentation en base 10.

Le dixième « chiffre » d'Ahmès sera 15 car 15 = 3 + 5 + 7 (la somme des nombres premiers impairs de la série).

Utilisation de R = 15

Le 15 va jouer un rôle spécial pour Q, R et S.
R = 15 est utilisé si et seulement Q = 6 (le premier nombre parfait).
Comme Q < R < S *(cf. supra, formule de la trame 1),*
Si R = 15 est accepté alors a = 0, d'où 2/N = [M, 6, 15].
La décomposition est donc nécessairement à 3 termes (triplet) si R = 15 est utilisé.

Remarque : ***Carré magique***, les nombres 15, 24 et 60 (*triplet d'Ahmès*).

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Carré I

2	7	6
9	5	10
4	3	8

Carré II

Le carré I est magique et est formé de la série 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Leur disposition est telle que les huit sommes suivantes sont toutes égales à 15.
La somme de chaque colonne est égale à 15.
La somme de chaque ligne est égale à 15
La somme de chaque diagonale est égale à 15

Le carré II est obtenu en substituant 1 à 10.
Dans le carré II formé de la série 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10.
Leur disposition est telle qu'on a les égalités suivantes :

La somme de la 1re colonne : 2+9+4 = 15
La somme de la 2ème colonne : 7+5+3 = 15
La somme de la 1re ligne est égale à 15
La somme de la dernière ligne est égale à 15
La somme de chaque diagonale est égale à 15
La somme de la 2ème ligne est égale à 24
La somme de la dernière colonne est égale à 24

24 est abondant et riche en diviseurs :

Les diviseurs de 24 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8,12 et 24.
La somme de tous les diviseurs de 24 est 60 : 1 + 2 +3 + 4 + 6 + 8 +12 + 24 = 60

Construction des choix possibles de M :

Les nombres premiers impairs représentés dans la deuxième colonne des carrés I et II sont : 3, 5 et 7.

Les diviseurs propres, pairs et non premiers de 24 sont : 4, 6, 8,12.

3 × 4 = 12 3 × 6 = 18 3 × 8 = 24 3 × 12 = 36

5 × 4 = 20 5 × 6 = 30 5 × 8 = 40 5 × 12 = 60

7 × 4 = 28 7 × 6 = 42 7 × 8 = 56 7 ×12 = 84

***Le choix des 10 nombres possibles pour M* (les unités d'Ahmès) :**

N étant premier, supérieur ou égal à 13, donc M supérieur ou égal à 8.
Choisir dans la liste suivante obtenue à partir de diviseurs de 24 :

8, 12, 18, 20, 24, 28, 30, 36, 40, 42, 56, 60, 84.

Il faut en choisir 10 parmi les 13.

Ce qu'il faut pour M :

M doit être inférieur ou égal à 60. 60 = 6 × 10, 10 est la base pour l'expression des nombres entiers et 6 est le premier nombre parfait. 60 est le plus grand élément du triplet d'Ahmès.

M doit également respecter l'une des conditions suivantes :

1) M est une puissance de 2
2) M est abondant et est multiple de l'un des trois nombres : 4, 5 ou 7.
4, 5 et 7 sont les 3 premiers nombres déficients qui ne divisent pas le nombre parfait 6.

Ainsi :
18 est exclu car n'est ni multiple de 4, ni de 5 ni de 7, ni une puissance de 2.
28 est exclu car n'est ni abondant, ni une puissance de 2.
84 est également exclu car est strictement supérieur à 60.

On obtient en définitive : 8, 12, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 56, 60.(*les unités d'Ahmès*)

***Loi ou règle harmonique d'Ahmès*:**

L' « astuce » consiste donc à bien choisir M parmi les *unités d' Ahmès*.

Si plusieurs choix de M sont possibles alors on choisira en définitive celui qui donne a = 0.

Si plusieurs choix de M sont possibles avec a = 0 ou le même nombre de termes dans la décomposition alors on choisira chaque fois M pour lequel P, Q et S ont le plus de nombres pairs. Si P, Q et S ont la même parité, on choisira M pour lequel P, Q et S sont plus petits.

Ces contraintes constituent une sorte de "*loi ou règle harmonique d'Ahmès*". Ce qui conduit au résultat du papyrus. On le verra dans le traitement de chaque décomposition.

Rappel : la série 1/2 +1/3 + 1/4 + 1/5 + … est *la série harmonique.*

1/2 + 1/3 + … + 1/P est un *nombre harmonique*.

Ainsi une fraction unitaire est tout simplement un terme de la série harmonique.

Dans la suite chaque décomposition sera effectuée dans le respect de la *règle harmonique d'Ahmès*.

14. Application de la trame étendue

Pour N premier ≠ 101.

N	13	17	19	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
P+2	8	10	11	16	17	20	22	22	25	28	31	32	35	37	38	41	43	46	50
2P	12	16	18	28	30	36	40	42	46	52	58	60	66	70	72	78	82	88	96
LMP	2	1	1	2	3	4	4	5	4	4	4	5	5	4	4	3	2	2	2
M	**8**	**12**	**12**	24	**20**	**24**	24	42	**30**	30	36	**40**	40	40	60	60	60	60	56
Q	4	3	4	2	4	3	6	2	3	6	4	4	5	8	3	3	4	4	7
R	8	4	6	6	5	8	8	3	10	15	9	8	8	10	4	4	5	6	8
S	!	!	!	8	!	!	!	7	!	!	!	10	!	!	5	10	6	10	!
[2/3 de N]	**8**	**11**	**12**	19	**20**	**24**	27	**28**	**31**	**34**	**39**	**40**	44	47	48	52	54	58	64

Conventions de notations :

! Signifie a = 0
M est une unité d'Ahmès comprise entre P + 2 et 2P soumise à *la règle harmonique d'Ahmès*.
LMP = Liste des M possibles.
[2/3deN] = partie entière de 2/3 de N

Remarque :

Il convient de noter que le tableau ci-dessus montre que lorsque [2/3deN] est égal à une « unité d'Ahmès » alors M = [2/3 de N]. C'est le cas pour N = 13, 19, 31, 37 et 61. Ceci montre de façon claire que la trame 1 est bien une extension de la trame générale à 2 termes, aux nombres premiers, avec un accroissement du nombre de termes dans la décomposition (qui passe de 2 à plus de 3 avec un maximum de 4 termes).

Le cas de N = 43 a provoqué une réelle admiration de Gillings (cf. *supra*, p. 156 et note 11) pour Ahmès. Soulignons tout simplement que [2/3de43] est égal au deuxième nombre parfait 28. M = 42 et 2/ 3 de 42 est égal à 28.

Procédure :

La *règle harmonique d'Ahmès* impose l'unicité de M. La procédure est décrite ci-après.

Pour chaque N, on trouve une liste des M possibles, le cardinal de la liste des M possibles est inférieur ou égal à 5.

Pour chaque M, on effectue $N/M = (2P+1)/M$, $P + 2 \leq M \leq 2P$ donc $1/2P \leq 1/M \leq 1/(P + 2)$

D'où $(2P+1)/ 2P \leq N/M \leq (2P+1)/(P + 2) < 2P+4)/(P + 2)$

Donc $1 + 1/2P \leq N/M < 2$.

Ainsi la 1ère étape N/M permet d'approcher 2.

La deuxième étape consiste à trouver la fraction complémentaire à 2 de N/M (Ce qui manque ou reste à N/M pour faire 2).

Puis suivant la *règle harmonique d'Ahmès* on décompose la fraction complémentaire à 2 de N/M avec un maximum de 3 termes : 1/P + 1/Q + a/S, a indicateur du nombre de termes, P, Q et S sont des *chiffre d'Ahmès*.

On procède ainsi pour tous les M possibles. Ce qui permet de choisir sans ambiguïté l'*unité d'Ahmès* M selon la *règle harmonique d'Ahmès*.

Enfin M étant choisi, on obtiendra la décomposition unique d'Ahmès en appliquant toujours la règle harmonique d'Ahmès si nécessaire.

En fait, on a N/M + N/N(1/P + 1/Q + a/S) = 2,

donc $\frac{2}{N} = \frac{1}{M} + \frac{1}{N}\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{R} + \frac{a}{S}\right)$ avec a = 0 ou 1 ; Q < R < S. (*formule de la trame 1*)

Cette exactement de cette façon qu'Ahmès procède.

La méthode générale d'Ahmès est purement algébrique. Elle est hautement théorique et d'une élégante finesse.

Nous proposons dans la suite une application stricte de la méthode théorique d'Ahmès pour chaque N premier compris entre 13 et 97. Le cas du nombre 101 étant traité d'une manière spécifique et géniale par Ahmès.

Application : **N premier et 13 ≤ N ≤ 97**

Pour N =13
P = 6
LMP = [8,12], cardinal de LMP = 2.

13/8 = 1 + 5/8, reste 3/8 = 1/4+ 1/8. D'où Q = 4, R = 8 et a = 0.
13/12 = 1 + 1/12, reste 11/12 = 1/2 + 1/4 + 1/6. D'où Q = 2, R = 4, S = 6 et a = 1.
On peut aussi écrire 11/12 = 1/2 + 1/3 + 1/12, mais 12 n'est pas un *chiffre d'Ahmès*.

La *règle harmonique* impose donc de prendre **M = 8** car a = 0.
Donc **2/13** = **[8, 4, 8] = 1/8 + 1/13 × (1/4+ 1/8) = 1/8 + 1/52 + 1/104**

Pour N = 17
P = 8
LMP = [12], cardinal de LMP = 1.

Donc M = 12
17/12 = 1 + 5/12, reste 7/12 = 1/3 + 1/4 D'où Q = 3, R = 4 et a = 0.
D'où **2/17** = **[12, 3, 4] = 1/12 + 1/17 × (1/3+ 1/4) = 1/12 + 1/51 + 1/68**

Pour N = 19
P = 9
LMP = [12], cardinal de LMP = 1
Donc M = 12
19/12 = 1 + 7/12, reste 5/12 = 1/4 + 1/6
D'où **2/19** = **[12, 4, 6] = 1/12 + 1/19 × (1/4+ 1/6) = 1/12 + 1/76 + 1/114**

Pour N = 29
P = 14
LMP = [20, 24], cardinal de LMP = 2

29/20 = 1 + 9/20, reste 11/20 = 1/2 + 1/20. Non retenu car 20 n'est pas un *chiffre d'Ahmès*.
29/24 = 1 + 5/24, reste 19/24 = 1/2 + 1/6 + 1/8.
Donc M = 24
D'où 2/29 = [24, 2, 6, 8] = 1/24 + 1/29 × (1/2 + 1/6 + 1/8) = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232

Pour N = 31
P = 15
LMP = [20, 24,30] cardinal de LMP = 3

31/20 = 1 + 11/20, reste 9/20 = 1/4 + 1/5. Retenu car a = 0.
31/24 = 1 + 6/24, reste 19/24 = 1/2 + 1/6 + 1/8. Non retenu car a serait égal à 1.
31/30 = 1 + 1/30, reste 29/30 = 1/2 + 1/3 + 1/10 + 1/30 = 1/2 + 1/5 + 1/6 + 1/15. Non retenu car on aurait 5 termes dans la décomposition.
Donc M = 20
D'où 2/31 = [20, 4, 5] = 1/20 + 1/31 × (1/4 + 1/5) = 1/20 + 1/124 + 1/155

Pour N= 37
P = 18
LMP = [20, 24, 30, 36] cardinal de LMP = 4.

37/20 = 1+17/20, reste 3/20 =1/10 + 1/20. Rejeté car 20 n'est pas un *chiffre d'Ahmès*.
37/24 = 1 + 13/24, reste 11/24 = 1/3 + 1/8. Retenu car a = 0.
37/30 = 1 + 7/30, reste 23/30 = 1/2 + 1/6 + 1/10. Rejeté car a serait égal à 1.

Donc M = 24
D'où 2/37 = [24, 3, 8] = 1/24 + 1/37 × (1/3 + 1/8) = 1/24 + 1/111 + 1/296

Pour N = 41
P = 20
LMP = [24, 30, 36,40] cardinal de LMP = 4

41/24 = 1 + 17/24, reste 7/24 = 1/6 + 1/8. Retenu car a = 0.
41/30 = 1 + 11/30, reste 19/ 30 = 1/3 + 1/5 + 1/10. Rejeté car a serait égal à 1.
41/40 = 1 + 1/40, reste 39/40 = 1/2 +1/4 +1/8 + 1/10. Rejeté car on aurait 5 termes dans la décomposition.

Donc M = 24
D'où 2/41 = [24, 6, 8] = 1/24 + 1/41 × (1/6 + 1/8) = 1/24 + 1/246 + 1/328

Pour N= 43
P = 21
LMP = [24, 30, 36, 40,42] cardinal de LMP = 5

43/24 = 1 + 19/24, reste 5 = 1/8 + 1/12. Rejeté car 12 n'est pas un *chiffre d'Ahmès*.

43/30 = 1 + 13/30, reste 17/30 = 1/2 + 1/15. Rejeté car Q = 2. *(cf.§ **utilisation de R = 15**, supra p.15)*

43/36 = 1 + 7/36, reste 29/36 = 1/2 + 1/4 + 1/18. Rejeté car 18 n'est pas un *chiffre d'Ahmès.*
43/40 = 1 + 3/40, reste 37/40 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/20 = ½ + 1/5 + 1/8 + 1/10. Rejeté car la décomposition aurait car plus de 4 termes.

43/42 = 1 + 1/42, reste 41/42 = 1/2 +1/3 + 1/7.

Donc M = 42
D'où 2/43 = [42, 2, 3, 7] = 1/42 + 1/43 × (1/2 +1/3 + 1/7) = **1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301**
Il est intéressant de relire ici l'exclamation de Gillings (cf. *supra*, p. 154)

Pour N = 47
P = 23
LMP = [30, 36, 40,42] cardinal de LMP = 4.

47/30 = 1+ 17/30, reste 13/30 = 1/3 +1/10. Retenu car a = 0.
47/36 = 1 + 11/36, reste 25/36 = 1/2 + 1/9 + 1/12.Rejeté car 12 n'est pas un *chiffre d'Ahmès*.

47/40 = 1 + 7/40, reste 33/40 =1/2 + 1/5 + 1/8. Rejeté car a serait égal à 1.

47/42 = 1 + 5/42, reste 37/42 = 1/2 + 1/3 + 1/21.Rejeté car 21 n'est pas un *chiffre d'Ahmès*.

Donc M = 30
D'où 2/47 = [30, 3, 10] = 1/30 + 1/47 × (1/3 +1/10) = 1/30 + 1/141 + 1/470

Pour N = 53
P = 26
LMP = [30, 36, 40,42] cardinal de LMP = 4.

53/30 = 1 + 23/30, reste 7/30 = 1/6 + 1/15. Car Q = 6 . *(cf.§ **utilisation de R = 15**, supra p.15)*

53/36 = 1 + 17/36, reste 19/36 = 1/4 + 1/6 + 1/9. Rejeté car a = 1 et donc on peut utiliser R = 15 et Q = 6.

53/40 = 1 + 13/40, reste 27/40 = 1/2 + 1/8 + 1/20. Rejeté car 20 n'est pas un *chiffre d'Ahmès*.

53/42 = 1 + 11/42, reste 31/42 = 1/2 + 1/6 + 1/14. Rejeté car 14 n'est pas un *chiffre d'Ahmès*.

Donc M = 30
D'où 2/53 = [30, 6, 15] = 1/30 + 1/53 × (1/6 + 1/15) = 1/30 + 1/318 + 1/795

Pour N = 59
P = 29
LMP = [36, 40, 42, 56] cardinal de LMP = 4.

59/36 = 1 + 23/36, reste 13/36=1/4 + 1/9.
59/40 = 1 + 19/40, reste 21/40=1/2 + 1/40. Rejeté car R = 40.
59/42 = 1 + 17/42, reste 25/42=1/2 + 1/14 + 1/42. Rejeté car R= 42.
59/56 = 1 + 3/56, reste 53/56 = 1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/28. Rejeté car R = 28.

Donc M = 36
D'où 2/59 = [36, 4, 9] = 1/36 + 1/59 × (1/4 + 1/9) = 1/36 + 1/236 + 1/531

Pour N = 61

P = 30
LMP = [36, 40, 42, 56,60] cardinal de LMP = 5.

61/36 = 1 + 25/36, reste 11/36 = 1/4 + 1/18. Rejeté R = 18.

61/40 = 1 + 21/40, reste 19/40 = 1/4 + 1/8 + 1/10.

61/42 = 1 + 19/42, reste 23/42 = 1/2 + 1/21 = 1/3 + 1/7 + 1/14. Rejeté car S = 14.
61/48 = 1 + 13/48, reste 35/48 = 1/2 + 1/6 + 1/16. Rejeté car S = 16.
61/56 = 1 + 5/56, reste 51/56 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/28. Rejeté car 5 termes
61/60 = 1 + 1/60, reste 59/60 = 1/2 + 1/3 + 1/10 + 1/20 = 1/2 + 1/3 + 1/12 + 1/15. Rejeté car 5 termes
.
Donc M = 40.
D'où 2/61 = [40, 4, 8, 10] = 1/40 + 1/61 × (1/4 + 1/8 + 1/10) = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610.

Pour N = 67
P = 33
LMP = [36, 40, 42, 56,60] cardinal de LMP = 5.

67/36 = 1 + 31/36, reste 5/36 = 1/12 + 1/18. Rejeté car R = 18.
67/40 = 1 + 27/40, reste 13/40 = 1/5 + 1/8.
67/42 = 1 + 25/42, reste 17/42 = 1/3 + 1/14. Rejeté car R = 14.
67/56 = 1 + 11/56, reste 45/56 = 1/2 + 1/7 + 1/8 + 1/28. Rejeté car 5 termes.
67/60 = 1 + 7/60, reste 53/60 = 1/2 + 1/3 + 1/20. Rejeté car S = 20.

Donc M = 40
D'où 2/67 = [40, 5, 8] = 1/40 + 1/67 × (1/5 + 1/8) = 1/40 + 1/335 + 1/536

Pour N = 71
P = 35

LMP = [40, 42, 56,60] cardinal de LMP = 4.

71/40 = 1 + 31/40, reste 9/40 = 1/8 + 1/10. a = 0, retenu car 8 et 10 sont pairs (cf. *règle harmonique d'Ahmès*).

71/42 = 1 + 29/42, reste 13/42 = 1/6 + 1/7. a = 0, rejeté car 7 est impair. (cf. *règle harmonique d'Ahmès*).

71/56 = 1 + 15/56, reste 41/56 = 1/2 + 1/8 + 1/14 + 1/28. Rejeté S = 28 et a = 1.
71/60 = 1 + 11/60, reste 49/60 = 1/2 + 1/4 + 1/15. Rejeté a = 1.

Donc M = 40
D'où 2/71 = [40, 8, 10] = 1/40 + 1/71 × (1/8 + 1/10) = 1/40 + 1/568 + 1/710

Pour N = 73
P = 36
LMP = [40, 42, 56,60] cardinal de LMP = 4.

73/40 = 1 + 33/40, reste 7/40 = 1/8 + 1/20. Rejeté car Q = 20
73/42 = 1 + 31/42, reste 11/42 = 1/6 + 1/14 + 1/42. Rejeté car S = 42
73/56 = 1 + 17/56, reste 39/56 =1/2 + 1/8 + 1/14. Rejeté car S = 14

73/60 = 1 + 13/60, reste 47/60 = 1/3 + 1/4 + 1/5.

Donc M = 60
D'où 2/73 = [60, 3, 4, 5] = 1/60 + 1/73 × (1/3 + ¼ + 1/5) = 1/60 + 1/ 219 + 1/292 + 1/365

Remarque : 1/73 est la fraction de chaque jour réservée aux 5 divinités Osiris, Isis, Seth, Nephtys et Horus. Donc chaque divinité a bien 1/5 × 1/73 = 1/365 fraction de jour. Donc 1 jour par An. Ce sont les 5 jours au-dessus de l'année, les *jours épagomènes*.[27]

Pour N = 79
P = 39
LMP = [42, 56,60] cardinal de LMP = 3.

79/42 = 1 + 37/42 , reste 5/42 = 1/14 + 1/21. Rejeté car Q = 21
79/56 = 1 + 23/56, reste 33/56 = 1/2 + 1/14 + 1/56. Rejeté car Q = 14
79/60 = 1 + 19/60, reste 41/60 = 1/3 + 1/4 + 1/10.

Donc M = 60
D'où 2/79 = [60, 3, 4, 10] = 1/60 + 1/79 × (1/3 + ¼ + 1/10) = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790

[27] 5 *ḥryw rnpt*

Pour N = 83
P = 41
LMP = [56,60] cardinal de LMP = 2.
83/56 = 1 + 27/56, reste 29/56 = 1/4 + 1/7 + 1/8.
83/60 = 1 + 23/60, reste 37/60 = 1/4 + 1/5 + 1/6. Décomposition retenue car 6 < 8 (et aussi 5 < 7) *(cf.règle harmonique)*

Donc M = 60
D'où 2/83 = [60, 4, 5, 6] = 1/60 + 1/83 × (1/4 + 1/5 + 1/6) = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498

Pour N = 89
P = 44
LMP = [56,60] cardinal de LMP = 2.

89/56 = 1 + 33/56, reste 23/56 = 1/4 + 1/8 + 1/28. Rejeté car S = 14.

89/60 = 1 + 29/60, reste 31/60 = 1/3 + 1/5 + 1/6 = ¼ + 1/6 + 1/10.
On choisit 1/4 + 1/6 + 1/10, car 4, 6 et 10 sont pairs alors que 3 et 5 sont impairs. (cf. *règle harmonique*).

Donc M = 60
D'où 2/89 = [60, 4, 6, 10] = 1/60 + 1/89 × (1/4 + 1/6 + 1/10) = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890

Remarque : 1/890 est la plus petite fraction utilisée dans les *décompositions d'Ahmès*.

Pour N= 97
P = 48
LMP = [56,60]

97/56 = 1 + 41/56, reste 15/56 = 1/7 + 1/8. Retenu car a = 0.
97/60 = 1 + 27/60, reste 33/60 = 1/4 + 1/5 + 1/10. Rejeté car a = 1.

Donc M = 56
D'où 2/97 = [56, 7, 8] = 1/56 + 1/97 × (1/7+ 1/8) = 1/56 + 1/679 + 1/776

***Le cas du nombre premier 101 : la perfection du nombre 6*[28]**

Pour N = 101
P = 50
LMP = [56,60]

101/56 = 1 + 45/56, reste 11/56 = 1/8 + 1/14
101/60 = 1 + 41/60, reste 19/60 = 1/4 + 1/15. Non retenu car Q = 4

---

[28] On peut relire ici la note de M. Caveing, *supra*, p. 156, note 14.

Aucune solution pour N = 101 qui respecte la *règle harmonique d'Ahmès*.
On applique alors la *perfection harmonique* : la perfection du nombre 6.

1 = 1/2 +1/3 + 1/6
2 = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/6
Donc **2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606**

15. Trame générale pour N non premier

On a vu plus haut une partition des fractions unitaires impaires.

Dénominateurs premiers

24 dénominateurs sont premiers :

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.

On a obtenu ci-dessus les 24 décompositions en appliquant la *trame générale étendue*.

Dénominateurs multiples de 3

16 dénominateurs sont multiples de 3 : 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99.

On a vu plus haut (§ 12) la décomposition pour N = 3 k, k impair, $3 \leq k \leq 33$:

2/N = 1/2k + 1/2N (*formule de la décomposition harmonique*)

Dénominateur carré (non triple)

2 dénominateurs sont des carrés, non triples : 25, 49.

On applique la *trame générale* : 2/N = 1/M + 1/(J × N) (*trame générale* à 2 termes),

avec un choix très simple pour M.

Si le carré A = C × C alors M = (A + C) / 2

Pour A = 25 = 5 × 5. M = (25 + 5) / 2 = 15

M = 15, 25/15 = 1 + 2/3, il reste 1/3 pour faire 2, donc **J = 3** et 3 × 25 = 75

2/25 = 1/15 + 1/75

Pour A = 49 = 7 x 7. M = (49 + 7) / 2 = 28

M = 28, 49/28 = 1 + 3/4, il reste 1/4 pour faire 2, donc **J = 4** et 4 × 49 = 196

2/49 = 1/28 + 1/196

On remarque que pour les 2 carrés, M n'est pas une *unité d'Ahmès*. En effet, M = 15 est le plus grand *chiffre d'Ahmès* et 28 est le *deuxième nombre parfait.*

Dénominateur divisible par 5 (non triple, non carré et non premier)

5 dénominateurs sont divisibles par 5 *(non triple, non carré et non premier)* : 35, 55, 65, 85,95.

Dénominateur divisible par 7 (non triple, non carré, non premier et non multiple de 5)

2 dénominateurs sont divisibles par 7 *(non triple, non carré, non premier et non multiple de 5)* : 77, 91.

Ces deux derniers cas de dénominateurs non triples, non premiers et non carrés constituent en réalité un seul ensemble, *les nombres composés*. Ils se décomposent en 2 facteurs premiers de la façon suivante :

$N = J \times P$, $J < P$, J, P sont premiers.

Nombre composé

<u>Cas I.</u>

On pose : $S_{JP} = (J + P) / 2$.

Si $S_{JP} = 6$, 10 ou 12 alors $M = J \times S_{JP}$. 6 est le premier nombre parfait. 10 est la base d'expression des nombres entiers et 12 est le *premier nombre abondant*.

M étant déterminée, étudions la décomposition pour ces 3 *nombres composés*.

Pour N = 35

$N = 35 = 5 \times 7$.
$S_{JP} = 6$ donc $M = 5\times6 = 30$.
$35/30 = 1 + 1/6$, il reste 5/6 pour faire 2.

On peut utiliser ici la fraction complémentaire 5/6 comme noté à la section sur l'originalité de l'arithmétique égyptienne (§4), on obtient alors R' = 6/5 qui est rationnel et non entier car la fraction de départ n'est pas unitaire.

On a donc : R'x N = 35 x 6/5 = 42.

La décomposition est donc **2/35 = 1/30 + 1/42.**

On remarque que c'est l'application de la *trame générale* à 2 termes : $2/N = 1/M + 1/(R' \times N)$, avec R' l'inverse d'une fraction complémentaire.

La décomposition est équivalente à celle qu'on peut obtenir avec la trame générale étendue sans utiliser la directement la fraction complémentaire : 5/6 = 1/2 + 1/3. Q = 2 et R = 3.

Q x N=70 et R x N = 105.
2/35 = 1/30 + 1/70 + 1/105.

En réalité, si S_{JP} = 6, 10 ou 12 alors M = J × S_{JP}. Alors la *décomposition d'Ahmès* est immédiate si le complément à 2 de N/M est une fraction complémentaire ou décimale bien connue :

2/N = 1/M + 1/ (P × S_{JP}) (décomposition immédiate)

Pour N = 91
91 = 7 × 13
S_{JP} = 10 donc M = 7×10 = 70.
91/70 = 1 + 21/70 = 1 + 3/10, il reste donc 7/10 pour faire 2. 7/10 est une fraction décimale bien connue.

Alors la *décomposition d'Ahmès* est immédiate : **2/91 = 1/70 + 1/130**.

On peut aussi décomposer simplement :
91/70 = 1 + 3/10, il reste 7/10 qui est une fraction décimale bien connue du recto du *Papyrus Rhind*.

On peut donc l'utiliser. Son inverse est R' = 10/7 qui est rationnel et non entier car la fraction de départ n'est pas unitaire.

On a donc : R'× N = (7 × 13) × 10/7 = 130.

Pour N = 95
N= 5 × 19
S_{JP} = 12 donc M = 5 × 12 = 60
95/60 = 1 + 7/12, il reste 5/12 pour faire 2. 5/12 = 1/4 + 1/6.

Donc Q = 4 et R = 6. Q × N = 380 et R × N = 570

La décomposition est **2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570.**

Cette décomposition est équivalente à la décomposition immédiate : 2/95 = 1/60 + 1/228.
Mais la décomposition immédiate n'est pas appliquée ici car 5/12 n'est pas ni une fraction complémentaire ni une fraction décimale bien connue.

Ahmès utilise la décomposition immédiate lorsque la fraction restante pour faire 2 est une fraction complémentaire ou une fraction décimale bien connues.

<u>Cas II.</u>

On pose : S_{JP} = (J + P) / 2.

Si $S_{JP} \neq$ 6, 10 ou 12

N = J × P, J < P, J, P sont premiers.

On pose :

S_{JN} = (J + N)/2 = J × (1 + P)/2
S_{PN} = (P + N)/2 = P × (1 + J)/2

Posons :

$S'_{JN} = (1 + P)/2$ et $S'_{PN} = (1 + J)/2$ alors $S_{JN} = J \times S'_{JN}$ et $S_{PN} = P \times S'_{PN}$ (*formule 1*).

Parité de **(S_{JN} et S_{PN}) ou (S'_{JN} et S'_{PN}) :**

Si S_{JN} et S_{PN} ou S'_{JN} et S'_{PN} sont de même parité (pair ou impair) alors M est choisi entre S_{JN} et $S_{PN,}$ en prenant celui qui minimise respectivement S'_{JN} ou S'_{PN} dans la *formule 1*, sinon on choisi pour M est le nombre pair parmi S_{JN} et S_{PN} .

On a :

$N/P + N/1 = 2 \times S_{JN}$ et $N/J + N/1 = 2 \times S_{PN}$. Par conséquent :

$2/N = 1/ S_{JN} + 1/ (P \times S_{JN}) = 1/ S_{PN} + 1/ (J \times S_{PN})$.

La décomposition sera donc immédiate après le choix de M.

Pour N = 55
$55 = 5 \times 11$, $S_{JN} = (5 + 55)/ 2 = 30$, $S_{PN} = (11 + 55)/ 2 = 33$. On choisit S_{JN} car 30 est pair et 33 impair. M = 30

La décomposition est immédiate : $2/55 = 1/30 + 1/ (11 \times 30) = 1/30 + 1/330$.
Pour N = 65.

$65 = 5 \times 13$, $S_{JN} = (5 + 65)/ 2 = 35$, $S_{PN} = (13 + 65)/ 2 = 39$. S_{JN} et S_{PN} sont impairs.
$S_{JN} = 35 = 5 \times 7$ et $S_{PN} = 39 = 13 \times 3$, $S'_{JN} = 7$ et $S'_{PN} = 3$, $\mathrm{Min}(S'_{JN}, S'_{PN}) = 3 = S'_{PN.}$

Donc $M = S_{PN} = 39$ car $\mathrm{Min}(S'_{JN}, S'_{PN}) = S'_{PN.}$

La décomposition est immédiate :

$2/N = 1/ S_{PN} + 1/ (J \times S_{PN}) = 1/39 + 1/(5 \times 39) =1/39 + 1/195$.

Pour N = 77.

$77 = 7 \times 11$, $S_{JN} = (7 + 77)/ 2 = 42$, $S_{PN} = (11 + 77)/ 2 = 44$. S_{JN} et S_{PN} sont pairs.
$S_{JN} = 42 = 7 \times 6$ et $S_{PN} = 44 = 11 \times 4$, $S'_{JN} = 6$ et $S'_{PN} = 4$, $\mathrm{Min}(S'_{JN}, S'_{PN}) = 4 = S'_{PN.}$

Donc $M = S_{PN} = 44$ car $\mathrm{Min}(S'_{JN} , S'_{PN}) = S'_{PN.}$

La décomposition est immédiate :

$2/N = 1/ S_{PN} + 1/ (J \times S_{PN}) = 1/44 + 1/(7 \times 44) = 1/44 + 1/308$.

Pour N = 85.

$85 = 5 \times 17$, $S_{JN} = (5 + 85)/ 2 = 45$, $S_{PN} = (17 + 85)/ 2 = 51$. S_{JN} et S_{PN} sont impairs.

$S_{JN} = 45 = 5 \text{ x } 9$ et $S_{PN} = 51 = 17 \times 3$, $S'_{JN} = 9$ et $S'_{PN} = 3$, Min $(S'_{JN}, S'_{PN}) = 3 = S'_{PN.}$
Donc $M = S_{PN} = 51$ car Min $(S'_{JN}, S'_{PN}) = S'_{PN.}$

La décomposition est immédiate :

$2/N = 1/ S_{PN} + 1/ (J \times S_{PN}) = 1/51 + 1/(5 \times 51) =1/51 + 1/255$.

16. Conclusion

Pour $N \neq 95$, impair, non premier les décompositions sont réalisées toujours avec 2 termes. Il existe une décomposition immédiate suivant les règles d'Ahmès pour les dénominateurs composés de 2 facteurs premiers impairs distincts.

La décomposition pour N = 95, en 3 termes, **2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570** est une confirmation de l'importance des fractions complémentaires et décimales. Aussi la décomposition pour N = 3, 2/3 est invariable, 2/3 = 2/3, car 2/3 est une fraction complémentaire, c'est la seule duplication de fraction unitaire égale à une fraction complémentaire.

Pour N multiple de 3, N = 3k, k impair, $3 \leq k \leq 33$,

On a $\frac{2}{N} = \frac{1}{(2k)} + \frac{1}{(2 \times N)} = \frac{1}{(2k)} + \frac{1}{(2k \times 3)}$ (*formule de la décomposition harmonique*).

Pour N premier, $N = 2 \times P + 1$, $P \geq 2$, **(P+1) diviseur de 12** (12 est le *premier nombre abondant*), la décomposition comporte 2 termes, $\frac{2}{N} = \frac{1}{(P+1)} + \frac{1}{(2 \times P + 1) \times (P+1)}$

(*formule de la décomposition parfaite*)

Pour N premier, $N = 2 \times P + 1$, $P \geq 2$, **(P+1) non diviseur de 12**, la décomposition est réalisée avec au moins 3 termes et 4 termes au maximum.

En définitive, on a pu expliciter une *méthode théorique correcte* pour arriver chaque fois à une décomposition unique, celle d'**Ahmès**.

Celle-ci montre que les notions de base de nombres pair et impair, de nombre premier, de nombre parfait, de nombre abondant et déficient, de nombre carré, de nombres composés décomposés en facteurs premiers, de moyenne arithmétique et harmonique, etc. sont parfaitement maîtrisés par le mathématicien égyptien qui a également introduit le zéro.

Contrairement à une opinion tenace, l'écriture égyptienne (hiéroglyphique, hiératique et démotique) n'interdit pas la notation des fractions de numérateur supérieur à 1. De même, l'idée selon laquelle les **décompositions en fractions unitaires** du recto du ***Papyrus Rhind*** seraient une conséquence de l'incapacité du système d'écriture égyptien, à représenter les fractions autres qu'unitaires ou complémentaires est erronée.

Les décompositions en fractions unitaires, qui font intervenir les nombres entiers et les nombres rationnels, sont une illustration de l'arithmétique que le mathématicien égyptien de l'époque pharaonique a élaborée. Le recto du ***Papyrus Rhind***, auquel il convient de donner le nom de son auteur **Ahmès**, constitue un joyau de l'histoire des mathématiques.

❒ Bibliographie

Ouvrages **:**

Cheikh Anta Diop, *Civilisation ou Barbarie*, Paris, Présence Africaine, 1981,
Sciences et Philosophie, Textes 1960 – 1986, Dakar, IFAN C. A. Diop, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, 2007.

Théophile Obenga , *La géométrie égyptienne – Contribution de l'Afrique antique à la mathématique mondiale*, Paris, L'Harmattan/Khepera, 1995.

Richard J. Gillings, *Mathematics in the time of the pharaohs*, Cambridge, MIT Press, 1972.

Maurice Caveing, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Thèse Université Paris X, 1977, Atelier national de reproduction des thèses, Université de Lille III, 1982. Tome I publié sous le titre : *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*, Presses Universitaires de Lille, 1994.

Marshall Clagett, *Ancient Egyptian Science*, A source Book, Volume Three Ancient Egyptian Mathematics, American Philosophical Society, Independence Square Philadelphia, 1999.

A. Gardiner, *Egyptian Grammar*, third edition, Griffith Institute, Asmolean Museum, Oxford, 1994.

Edouard Lucas, *Théorie des nombres*, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1991.

O. Gillain, *La science égyptienne : l'arithmétique au Moyen Empire*, Paris et Bruxelles, 1927.

B. L. Van Der Warerden, *Science Awakening*, Sciences Editions, New York, 1963.

Geneviève Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion, 1992.

W. M. Flinders Petrie*, Illahun, Kahun and Gurob,*London, 1889-90.

Paul Benoît, Karine Chemla et Jim Ritter. *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Birkhaüser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992.

Gay Robins & Charles Shute, *The Rhind Mathematical Papyrus,* British Museum Press, London, 1987.

Articles **:**

Sylvester, J. J., "On a Point in the Theory of Vulgar Fractions": *American Journal of Mathematics*, 3 Baltimore (1880): 332–335, 388–389.

Wilbur Knorr, "Techniques of fractions in ancient Egypt and Greece", in *Historia Mathematica* 9 (1982), 133-171.

M. Bruchheimer & Y. Salomon, "Some Comments on R. J. Gillings Analysis of the 2/n Table in the Rhind Papyrus", in *Historia Mathematica* 4 (1977), 445-452.

E. M. Bruins, "Platon et la table égyptienne 2/N", in *Janus*, Vol. 46, 1957, 253-263.

E. M. Bruins, "Egyptian Arithmetics", *ibid*., LXVIII, 1981, 33-52.

E. M. Bruins, "Reductible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics", *ibid*., LXVIII, 1981, 281-297.

Richard J.Gillings, "The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus. How Did the Ancient Egyptian Scribe Prepare It ?" in *Archive for the history of Exact Sciences*, 12, n° 4(1974), 291-298.

Richard J. Gillings, "What is the relation between the EMLR and the RMP Recto ?", *ibid.,* 14, n° 3(1975), 159-167.

Richard J. Gillings, "The Mathematics of Ancient Egypt", in *Dictionary of scientific biography, American council of learned societies,* Charles Scribner's sons, New-York, 1981, p. 681-705.

Beatrice Lumpkin, "Mathematics Used in Egyptian Construction and Bookkeeping", in *the Mathematical Intelligencer*, 24, n°2, 2002, p. 20-25.

Beatrice Lumpkin, "Ancient Egyptian Mathematics and Forerunners, Some Hints from Work Sites", *in A Delta-Man in Yebu : Occasional Volume of the Egyptologist's Electronic Forum,* A.K Eyma and C. J. Bennett(ed.), n° 1, 2003.

ANKH – *Revue d'égyptologie et des civilisations africaines*, Gif–Sur- Yvette, Khepera : n^os^ 4/5, 6/7 et 8/9.

***Sites internet* :**

Keith, M. "Egyptian Unit Fractions. " http://www.mathpages.com/home/kmath340/kmath340.htm

Milo Gardner, "Vulgar fractions and 2/nth tables".
http://egyptianmath.blogspot.com/2005/12/vulgar-fractions-and-2nth-table.html

Milo Gardner, Breaking the RMP 2/nth table code,
http://www.ecst.csuchico.edu/~atman/Misc/horus-eye.html

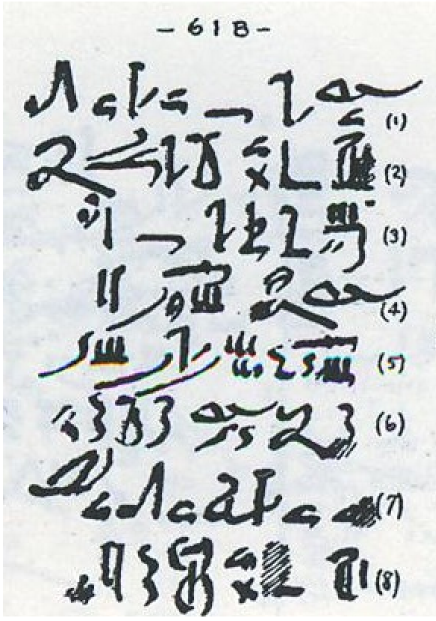
http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/best-egyptian-fraction.html

❒ Complément illustratif

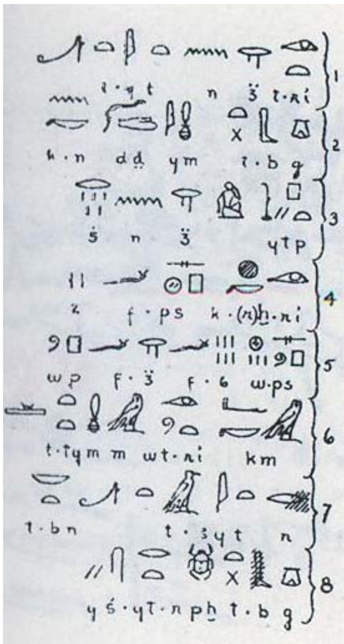
[Problem 61B]

[Rule for] taking 2/3 of an uneven fraction (i.e., the reciprocal of an odd number). If it is said to you "What is 2/3 of 1/5?" you take the reciprocals of 2 times 5 and 6 times 5. You do the same thing to get 2/3 of the reciprocal of any odd number.

Problème 61B : Traduction en anglais de Marshall Clagett, "Ancient Egyptian Science", ***A source Book, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics,*** American Philosophical Society, Independence Square Philadelphia, 1999, p. 169.



Extrait du texte hiératique du *Papyrus Rhind*



Transcription hiéroglyphique correspondante

Marshall Clagett, "Ancient Egyptian Science", ***A source Book, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics,*** American Philosophical Society, Independence Square Philadelphia, 1999, p. 367, Plate 83.

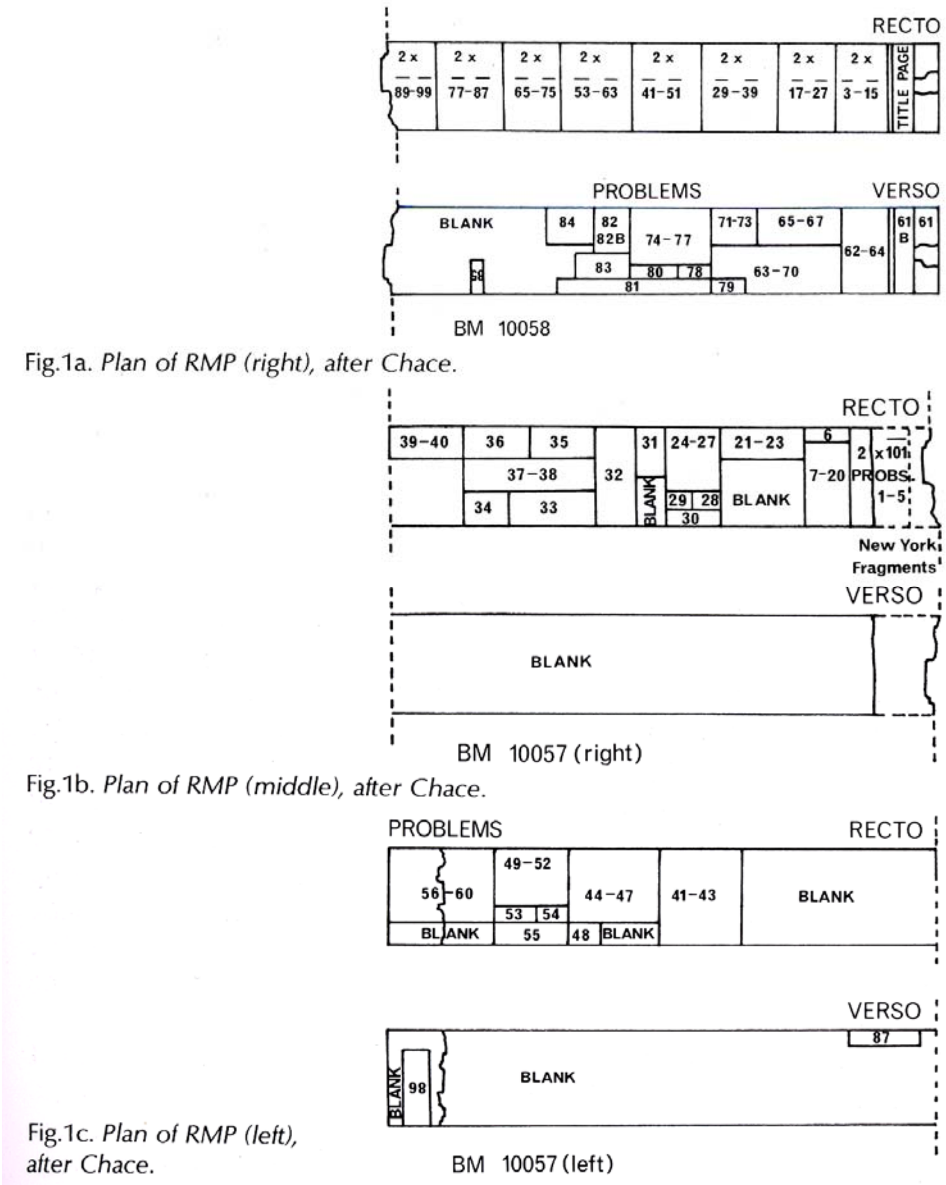


Fig.1a. *Plan of RMP (right), after Chace.*

Fig.1b. *Plan of RMP (middle), after Chace.*

Fig.1c. *Plan of RMP (left), after Chace.*

Schéma des différentes parties du *Papyrus Rhind*. Gay Robins & Charles Shute, ***The Rhind Mathematical Papyrus,*** British Museum Press, London, 1987, p. 11.

❒ L'auteur :

Jean-Paul FOUGAIN a une formation de mathématicien et est ingénieur dans le domaine des télécommunications.